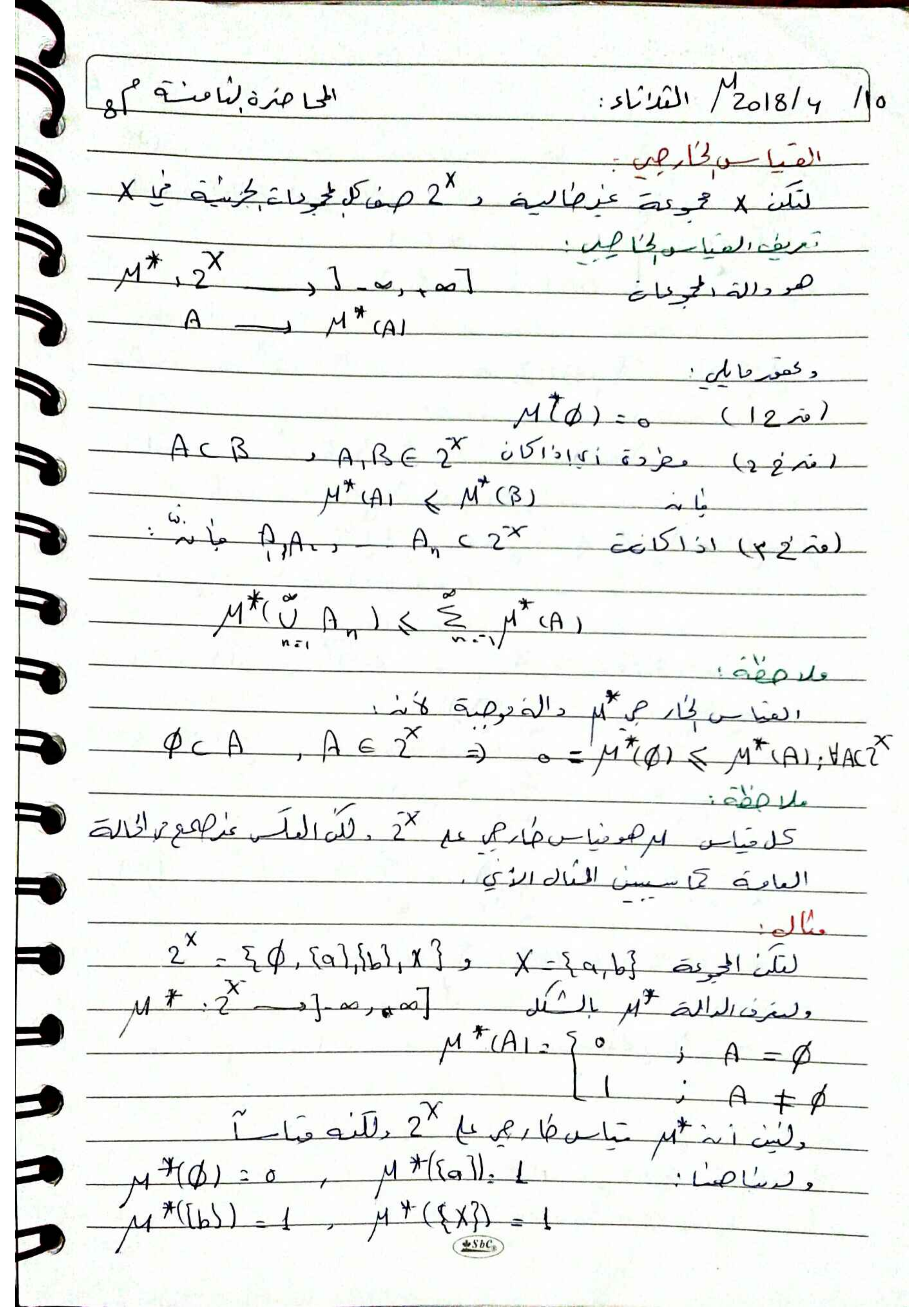


القياس الخارجي:

لتكن X مجموعة غير خالية و 2^X صف كل المجموعات الجزئية في X

تعريف القياس الخارجي:

هو دالة المجموعات

$$\mu^*: 2^X \longrightarrow [-\infty, \infty]$$
$$A \longrightarrow \mu^*(A)$$

وتحقق ما يلي:

(م1) $\mu^*(\phi) = 0$

(م2) مطردة أي إذا كان $A, B \in 2^X$ ، $A \subset B$

فإن $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(م3) إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n \subset 2^X$ فإن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

ملاحظة:

القياس الخارجي μ^* دالة موجبة لأنه:

$$\phi \subset A \ , \ A \in 2^X \Rightarrow 0 = \mu^*(\phi) \leq \mu^*(A); \forall A \subset 2^X$$

ملاحظة:

كل قياس μ هو قياس خارجي على 2^X ، لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة كما يبين المثال الآتي.

مثال:

لتكن المجموعة $X = \{a, b\}$ و $2^X = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$

ولنعرف الدالة μ^* بالشكل $\mu^*: 2^X \longrightarrow [-\infty, \infty]$

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & ; A = \phi \\ 1 & ; A \neq \phi \end{cases}$$

ولنبين أن μ^* قياس خارجي على 2^X ، ولكنه ليس قياساً

ولدينا:

$\mu^*(\phi) = 0$ ، $\mu^*(\{a\}) = 1$

$\mu^*(\{b\}) = 1$ ، $\mu^*(\{X\}) = 1$

- كل قياس هو قياس خارجي ، والعكس غير صحيح في الحالة العامة .

/	/

(قحخ 1) واضح $\mu^*\{\phi\} = 0$

(قحخ 3) $\mu^*(\{a\} \cup \{b\}) = 1 \leqslant 1+1 = \mu^*(a) + \mu^*\{b\}$

(قحخ 2)

لدينا : $\{a\} \subset X \ , \ \{b\} \subset X$

لذلك $1 = \mu^*(\{a\}) \leqslant \mu^*(\{X\}) = 1$

$1 = \mu^*(\{b\}) \leqslant \mu^*(\{X\}) = 1$

وبذلك يكون μ^* قياساً خارجياً على 2^X ولكن μ^* ليس قياساً لأنه

$\mu^*(\{a\} \cup \{b\}) = 1$

بينما $\mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\}) = 1 + 1 = 2$

إذن $\mu^*(\{a\} \cup \{b\}) \neq \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\})$

حيث $\{a\} \cap \{b\} = \phi$

مبرهنة : بدون برهان .

ليكن $\mu : H \longrightarrow [0, +\infty]$ قياساً على نصف الحلقة H ولتكن دالة المجموعات

$\mu^* : 2^X \longrightarrow [0, +\infty]$

$A \longrightarrow \mu^*(A)$

معرفة بالشكل :

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n\geq 1}^{\infty} \mu(A_n) \ ; \ \exists \{A_n\} \subset H \ , \ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

أي أن ، $\inf$ يؤخذ على كل التغطيات الممكنة للمجموعة A حيث $A \subset 2^X$ بمجموعات A_n حيث $(A_n \in H)$

$\mu^*(A)$ معرف من أجل كل مجموعة $A \in 2^X$ لأن $X \in H$

إذن μ^* قياس خارجي على 2^X ، إضافة $\mu^*|_H = \mu$

التمديد من الصغير الى الكبير (H_1 , H_2)

1/ المقصور من الكبير الى الصغير (H , H_2)

تعريف التمديد المقصور:

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن 2^X صف كل المجموعات الجزئية في X

ولتكن H_1 , H_2 صفين جزئيين من 2^X بحيث $H_1 \subset H_2$

ولتكن دوال المجموعات

$$\gamma_1 : H_1 \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$
$$\gamma_2 : H_2 \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

عندئذٍ نقول:

(1) الدالة γ_2 تمديد للدالة γ_1 من الصف H_1 الى الصف H_2

اذا كان: $\gamma_2(A) = \gamma_1(A) \; ; \; \forall A \in H_1$

ونكتب $\gamma_2 = \tilde{\gamma}_1$

(2) اذا تحقق (1) نقول بأن γ_1 مقصور γ_2 على الصف H_2 على

الصف H_1 ونكتب $\gamma_1 = \gamma_2|_{H_1}$

ملاحظة 1:

γ_1 , γ_2 في التعريف السابق قد تكونا قياساً أو قياساً خارجياً

(احداهما أو كلاهما) أو أية دالة مجموعات.

ملاحظة 2:

لتكن μ , μ^* كما في المبرهنة 1.

نلاحظ أن μ^* تمدد القياس μ من نصف الحلقة H الى كل 2^X

كما أن القياس μ هو مقصور القياس الخارجي μ^* من الصف 2^X الى الصف H

نسمي μ^* القياس الخارجي (المولّد) المنتج من القياس μ

كما نسمي μ القياس (المولّد) للقياس الخارجي μ^*

المجموعات القيوسة :

ليكن $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ قياساً خارجياً .

وليكن $E \in 2^X$

تعريف :

نقول ان المجموعة E قيوسة وفق μ^* (أو μ^* قيوسة) اذا كان :

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) , \forall A \in 2^X$$

سنرمز بـ $\mathcal{M}_{\mu^*}$ لصف كل المجموعات القيوسة من μ^*

ملاحظة :

مما تقدم نلاحظ فوراً ما يلي :

(1) إذا كانت المجموعة E قيوسة وفق μ^* فتكون كذلك المجموعة E^c

(2) $\mathcal{M}_{\mu^*} \subset 2^X$

(3) للتأكد ان المجموعة E قيوسة نكتفي اثبات صحة المتراجحة :

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) , \forall A \in 2^X$$

لأن المتراجحة المعاكسة

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

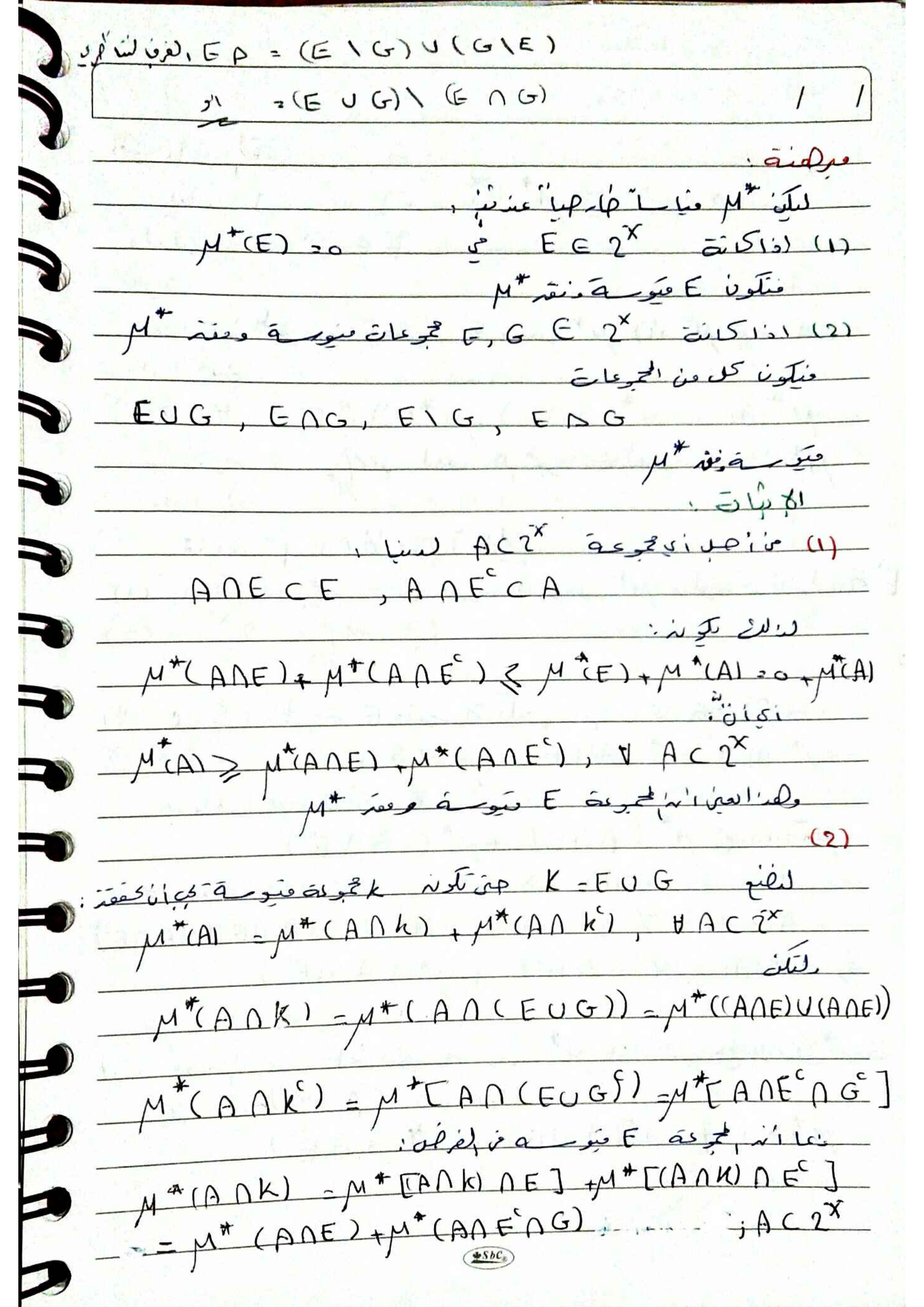
محققة دوماً وذلك لأن $A \subset X$. التالي :

$$A = A \cap X = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

(4) تكون المجموعة E غير قيوسة وفق μ^* اذا وجد على الأقل مجموعة A_0 حيث $(A_0 \subset 2^X)$ بحيث أن :

$$\mu^*(A_0) \neq \mu^*(A_0 \cap E) + \mu^*(A_0 \cap E^c)$$



الفرق التناظري، $E \Delta G = (E \setminus G) \cup (G \setminus E)$

أو $= (E \cup G) \setminus (E \cap G)$

مبرهنة:

ليكن μ^* قياساً خارجياً عندئذٍ،

(1) اذا كانت $E \in 2^X$ وفي $\mu^*(E) = 0$

فتكون E مقيسة وفق μ^*

(2) اذا كانت $E, G \in 2^X$ مجموعات مقيسة وفق μ^*

فيكون كل من المجموعات

$E \cup G \,,\, E \cap G \,,\, E \setminus G \,,\, E \Delta G$

مقيسة وفق μ^*

الإثبات:

(1) من اجل اي مجموعة $A \subset 2^X$ لدينا،

$A \cap E \subset E \,,\, A \cap E^c \subset A$

لذلك يكون:

$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = 0 + \mu^*(A)$

أي أن:

$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \,,\, \forall A \subset 2^X$

وهذا يعني ان المجموعة E مقيسة وفق μ^*

(2)

لنضع $K = E \cup G$ حتى تكون k مجموعة مقيسة يجب ان يتحقق:

$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap k) + \mu^*(A \cap k^c) \,,\, \forall A \subset 2^X$

ولكن

$\mu^*(A \cap K) = \mu^*(A \cap (E \cup G)) = \mu^*((A \cap E) \cup (A \cap E))$

$\mu^*(A \cap k^c) = \mu^*[A \cap (E \cup G)^c] = \mu^*[A \cap E^c \cap G^c]$

بما أن المجموعة E مقيسة من الفرض:

$\mu^*(A \cap k) = \mu^*[(A \cap k) \cap E] + \mu^*[(A \cap k) \cap E^c]$; $A \subset 2^X$

$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c \cap G)$

/ /

$\mu^*(A\cap K^c) = \mu^*(A\cap E^c\cap G^c)$ وبالتعويض:

ينتج أن:

$\mu^*(A\cap K) + \mu^*(A\cap K^c) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c\cap G)$

$+ \mu^*(A\cap E^c\cap G^c) =$

$= \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c)$ (G) متيوسة

$= \mu^*(A) \quad ; \forall A\subset 2^X$ (E) متيوسة

وبذلك تكون المجموعة $K = E\cup G$ متيوسة وفقـ μ^*

• وبما أن:

$(E\cap G) = (E^c\cup G^c)^c$

⇐ ينتج أن $E\cap G$ مجموعة متيوسة.

• وبما أن:

$E\setminus G = E\cap G^c$

ينتج أن $E\setminus G$ مجموعة متيوسة

• وبما أن $E\Delta G = (E\setminus G)\cup(G\setminus E)$

ينتج أن $E\Delta G$ مجموعة متيوسة وفقـ μ^*

نتيجة:

إذا كانت $E_1, E_2, \ldots, E_n$ مجموعات متيوسة وفقـ μ_n^*

فيكون الاجتماع والتقاطع $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ و $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$

مجموعات متيوسة وفقـ μ^*

مبرهنة (٣) بدون برهان:

إذا كانت $E_1, E_2, \ldots E_n$ مجموعات متيوسة ومنفصلة مثنى مثنى

فيكون الاجتماع مجموعة متيوسة وفقـ μ^* و $(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$

كما أن

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

الإثبات: غير مطلوب.

اذا اجتماع مجموعات مقيوسة هو مجموعة مقيوسة.

أم
$\mathcal{M}_{\mu^*}$
ميوخية

نتيجة:

اذا كانت $E_1, E_2, \ldots, E_n$ مجموعات مقيوسة بمقدر μ^* ليست بالضرورة منفصلة مثنى مثنى عندئذٍ يكون:

اجتماع $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ وتقاطع $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ مجموعات مقيوسة بمقدر μ^*

لأنه:

الإثبات:

لنكتب
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n$$
$$= E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup [E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)] \cup \ldots$$
$$\cup [E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i] \cup \ldots$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} [E_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)] \Rightarrow$$

مجموعات ميوسة منفصلة مثنى مثنى ما اجتماع مجموعة ميوسة.

وبذلك يكون $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ مجموعة مقيوسة بمقدر μ^*

- وعان التقاطع
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c)^c$$
اجتماع لمتممات

نستنتج انه $(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$ مجموعة مقيوسة بمقدر μ^*

مبرهنة هامة جداً: كاراتيودوري.

ليكن μ^* قياساً خارجياً على 2^X ولتكن $\mathcal{M}_{\mu^*}$ صف المجموعات القيوسة بمقدر μ^* عندئذٍ:

(1) $\mathcal{M}_{\mu^*}$ تشكل حلقة على X.

(2) قصور μ^* على $\mathcal{M}_{\mu^*}$ يعطي قياساً سنرمزله بـ μ أي:
$$\mu = \mu^* |_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$$

(3) القياس μ تام.

/ /

الإثبات:

(1) إن $\mathcal{M}_{\mu^*}$ تشكل σ-جبر على X لأن:

• اذا كانت $E, G \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن $E \setminus G \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

• اذا كانت $E_1, E_2, \ldots \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

وبذلك تكون $\mathcal{M}_{\mu^*}$ σ-حلقة على X

حسب الفرض فإن $\mu^*(\phi) = 0 \Leftarrow$ وبالتالي فإن ϕ مجموعة مقيسة لذلك تكون $X = \phi^c$ (وهي مقيسة، الخاصية دولا) مجموعة مقيسة

اي ان $X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ اي ان $\mathcal{M}_{\mu^*}$ σ-جبر على X

(2) لتكن $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ (μ مقصور μ^* على الصف $\mathcal{M}_{\mu^*}$) ونثبت انه قياس.

(ق1) الحالة الخاصة $\phi \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن:

محقق $\mu(\phi) = \mu^*(\phi) = 0$ OK

(ق2) من اجل أي مجموعة $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن:

$\mu(E) = \mu^*(E) \geq 0$

(ق3) لتكن $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ومنفصلة مثنى مثنى عندئذ تكون حسب المبرهنة:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

اي ان μ قياس على $\mathcal{M}_{\mu^*}$

SbC

(٣) لإثبات أنّ المقياس μ تام نفرض:

$E \subset \mathcal{M}$ ، $\mu(E) = 0$: $F \subset E$

ونثبت أنّ المجموعة F قيوسة ، أي أنّ $(F \in \mathcal{M}_{\mu^*})$ μ^*

من أجل أية مجموعة $A \subset 2^X$ لدينا :

$\mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*[(A \cap E^c) \cup$

$\cup (A \cap (E \setminus F))] \leq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap E^c)$

$= \mu^*(A)$

وبذلك يكون $F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ والمقياس μ تام.

مبرهنة 5

إذا كان $\mu^*(G) = 0$ فإنّ :

$\mu^*(E \setminus G) = \mu^*(E \cup G) = \mu^*(E)$

حيث $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

الإثبات: بما أنّ $E \subset E \cup G$ فيكون :

$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cup G) \leq \mu^*(E) + \mu^*(G) = \mu^*(E) + 0$

$\rightarrow \mu^*(E \cup G) = \mu^*(E)$

وبما أنّ :

$E \subset (E \cup G)$, $(E \setminus G) \subset E$

فيكون

$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \setminus G) + \mu^*(G) \leq \mu^*(E) + 0$

$\rightarrow \mu^*(E \setminus G) = \mu^*(E)$

انتهت المحاضرة ٧

SbC